

Signalverarbeitung in der Nachrichtentechnik – Spektralschätzung

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 4 Spektralschätzung
 - Einführung und Problemstellung
 - Wie definiert man eine Leistungsdichte für stochastische Prozesse?
 - Nicht-parametrische Methoden
 - Parametrische Methoden
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- Folgendes hauptsächlich nach:

P. Stoica, R. Moses, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall, 2005.

Zitiert als [StMo05]. Dies ist das Lehrbuch zu diesem Kapitel. Struktur und Notation sowie einige Beweise folgen diesem Buch.

- Ebenfalls lehrreich:

- Kay, *Modern Spectral Estimation*
- Kammeyer, Kroschel, *Digitale Signalverarbeitung*, Teubner
- Proakis, Manolakis, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall



- 4 Spektralschätzung
 - Einführung und Problemstellung
 - Wie definiert man eine Leistungsdichte für stochastische Prozesse?
 - Nicht-parametrische Methoden
 - Parametrische Methoden
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur

- Die Folien enthalten exemplarische Illustrationen von Autokorrelationsfunktionen (AKFs) und Leistungsdichtespektren (power spectral densities, PSDs)
- AKF: Beispiele sind auf $r[0] = 1$ normiert
- PSD: In den Beispielen mit „nur Rauschen“
 - ... ist die y-Achse linear
 - ... ist die y-Achse nicht normiertum die Rauschleistung besser erkennen zu können.
- PSD: „Signal plus Rauschen“ Beispiele
 - ... sind so normiert, dass deren Maximalwert 1 ist.
 - ... werden in dB relativ zu deren Maximalwert dargestellt, wo immer das möglich ist, d.h., falls keine „pathologischen“ Situationen entstehen (etwa negative Werte)

- Stochastische Prozesse sind zeitdiskret: $Y[n]$
- Stochastische Prozesse haben Erwartungswert Null: $\mathbb{E}(Y[n]) = 0$ für alle n
- Statistische Beschreibung der stochastischen Prozesse über deren AKF:

$$r[k] := \mathbb{E}(Y[n+k]Y^*[n]);$$

hierdurch wird implizit angenommen, dass *die AKF nur von k und nicht von n abhängt* \implies *schwach stationärer Prozess*

- **Frage:** Wie definiert man den Spektralgehalt eines stochastischen Prozesses?
- **Bemerkung:** Da die Realisierungen zufällig sind, ergibt sich ein durchschnittlicher Spektralgehalt

■ Gegeben:

- Endliche Anzahl von Beobachtungen/Samples $y[1], \dots, y[N]$
- Samples seien von einem mittelwertfreien, schwach stationären Prozess $Y[n]$ erzeugt

■ Aufgaben:

- Definiere Spektralgehalt für schwach stationäre Prozesse
- Finde bestmögliche Schätzung für die PSD¹ $\Phi(\Omega)$ eines schwach stationären Prozesses $Y[n]$, von dem eine endliche Anzahl Samples $y[1], \dots, y[N]$ gegeben sind.

- **Bemerkung:** Großbuchstaben bezeichnen sowohl Zufallsvariablen (und Prozesse) als auch den Fourier-Bereich für eine Realisierung des Prozesses. Diese übliche Notation sollte (hoffentlich) keine Verwirrung erzeugen und wird beibehalten.

¹[StMo05] verwendet $t_s = 1$ resp. ω statt Ω . Wir verwenden die Notation wie im Grundlagenkapitel eingeführt.



- 4 Spektralschätzung
 - Einführung und Problemstellung
 - **Wie definiert man eine Leistungsdichte für stochastische Prozesse?**
 - Nicht-parametrische Methoden
 - Parametrische Methoden
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur

■ Erste Definition: Korrelogramm

$$\Phi_c(\Omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]e^{-j\Omega k}$$

wobei $r[k] = \mathbb{E}(Y[n+k]Y^*[n])$ die AKF von $Y[n]$ bezeichnet.

■ Bemerkungen:

- Ist $y[n]$ reellwertig, so auch $r[k]$; im diesem Fall folgt $\Phi_c(-\Omega) = \Phi_c^*(\Omega)$.
- Falls die AKF nicht bekannt ist, muss sie geschätzt werden. Dies wird in Bälde diskutiert.



■ Zweite Definition: *Periodogramm*

$$\Phi_P(\Omega) := \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N Y[n] e^{-j\Omega n} \right|^2 \right)$$

■ **Übungen:**

- Zeigen Sie, dass die Definition übereinstimmen, falls²

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |kr[k]| = 0$$

d.h., falls die AKF schneller als linear abfällt.

- Zeigen Sie, dass Integration der PSD die Leistung des Prozesses $Y[n]$ ergibt.

²Siehe [StMo05].



■ Nicht-parametrische Methoden

- FFT-basiert
 - Korrelation-basiert
- Direkte Verwendung der PSD-Definitionen

■ Parametrische Methoden

- Basierend auf Signalmodellen
- Identifizieren von Parametern der Modelle
- Benötigen hinreichende Menge an Information über das Signal („Mismatching auf ein falsches Modell kann sehr schlecht sein“)



4 Spektralschätzung

- Einführung und Problemstellung
- Wie definiert man eine Leistungsdichte für stochastische Prozesse?
- **Nicht-parametrische Methoden**
 - Spektrogramm, Korrelogramm und Schätzung der AKF
 - Erwartungstreue und Varianz der Schätzung
 - Blackman-Tukey-, Bartlett- und Welch-Methode
- Parametrische Methoden
- Lernzielkontrolle
- Literatur



- **Ausgangspunkt:** N Beobachtungen $y[1], \dots, y[N]$
- **Gesucht:** Schätzung $\hat{\Phi}(\Omega)$
- **Bemerkung:** Praktisch würde die Frequenzvariable selbstredend ebenfalls diskretisiert werden. Für die folgenden Analysen wird jedoch weiterhin Ω betrachtet.

- Nach Definition der PSD sind folgende Schätzungen naheliegend
 - Schätzung der AKF und Korrelogramm:

$$\hat{\Phi}_c(\Omega) := \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}[k] e^{-j\Omega k}$$

- Direkte Verwendung der DTFT:

$$\hat{\Phi}_p(\Omega) := \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N y[n] e^{-j\Omega n} \right|^2$$

■ Fragen:

- Wie sollen AKFs geschätzt werden?
- Qualität/Güte der Schätzer?



- Schätzung der AKF für positive Verzögerungen durch:

$$\hat{r}[k] := \frac{1}{L} \sum_{n=k+1}^N y[n]y^*[n-k]$$

Fortsetzung auf negative Verzögerungen durch $\hat{r}[-k] = \hat{r}^*[k]$. (**Übung:** Rechtfertigen Sie diesen Schritt.)

- Offensichtlich hängt der Schätzer vom Parameter L ab.

■ **Bemerkung:** (Übung: Nachweis)

- Für $L = N - k$ ist der Schätzer erwartungstreu:

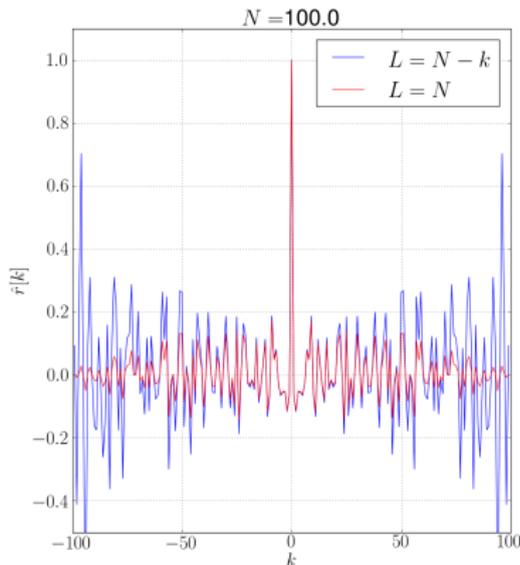
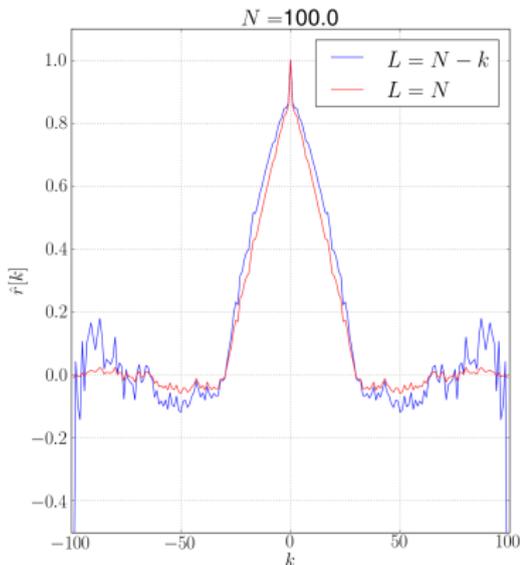
$$\mathbb{E}(\hat{r}_{L=N-k}[k]) = r[k], \quad -(N-1) \leq k \leq N-1$$

- Für $L = N$ ist der Schätzer nicht erwartungstreu:

$$\mathbb{E}(\hat{r}_{L=N}[k]) = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) r[k], \quad -(N-1) \leq k \leq N-1$$

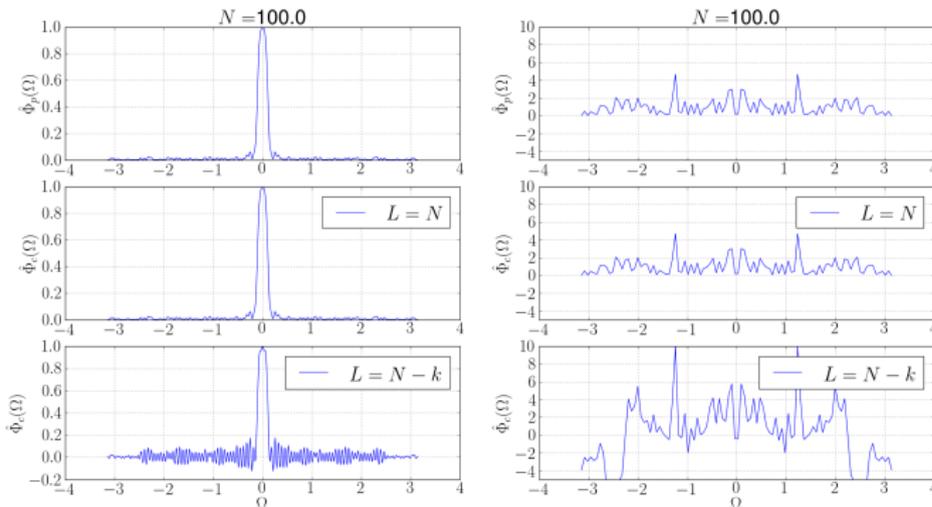


- **Beispiel:** Schätzung der AKF eines verrauschten Rechtecks und eines weißen, gaußschen Rauschens



- **Theorem:** Die Schätzung der PSD durch das Periodogramm $\hat{\Phi}_p(\Omega)$ und durch das Korrelogramm $\hat{\Phi}_c(\Omega)$ sind identisch, falls die nicht erwartungstreue Schätzung der AKF verwendet wird.
- **Nachweis:** Übung
 - Hinweis: Starten Sie mit der Definition des Periodogramms
 - Vertauschen der Summen und Wechsel der Summationsvariablen

- **Beispiel:** Verrauschtes Rechteck und weißes, gaußsches Rauschen:
Schätzung der PSD



- **Beobachtung:** Erwartungstreue AKF-Schätzung ergibt negative PSD?!

- **Theorem:** Für eine beliebige Zeitfolge $r[k]$ gilt genau dann³

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]e^{-j\Omega k} \geq 0,$$

wenn $r[k]$ positive semi-definit ist, d.h., falls für jedes m gilt:

$$\mathbf{x}^H \mathbf{R}_m \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{R}_m := \begin{pmatrix} r[0] & r[1] & \cdots & r[m-1] \\ r^*[1] & r[0] & \cdots & r[m-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*[m-1] & r^*[m-2] & \cdots & r[0] \end{pmatrix}$$

Die zweite Bedingung ist erfüllt, falls $r[k]$ die AKF eines Signals $y[n]$ ist.

³Siehe [StMo05].

■ Bemerkungen:⁴

- \mathbf{R} ist positiv semi-definit genau dann, wenn alle Eigenwerte nicht-negativ sind.
- \mathbf{R} ist positiv semi-definit genau dann, wenn \mathbf{R}^H positiv semi-definit ist.
- Der nicht erwartungstreue AKF-Schätzer $\hat{r}_{L=N}[k]$ ist positiv semi-definit⁵ (somit ist er ein Kandidat für die AKF eines Signals). Der erwartungstreue Schätzer $\hat{r}_{L=N-k}[k]$ ist nicht positiv semi-definit.
- Es kann gezeigt werden, dass jede positiv semi-definite Funktion die AKF eines geeignet definierten Signals ist.
- Letztlich hat die „PSD“ auf Folie 20 negative Werte, da bei der Schätzung implizit Windowing verwendet wurde. Wie später gezeigt hängt die Nicht-Negativität von dem verwendeten Fenster ab.

⁴[StMo05]

⁵Dies ist eine direkte Konsequenz der Aussage auf Folie 19.

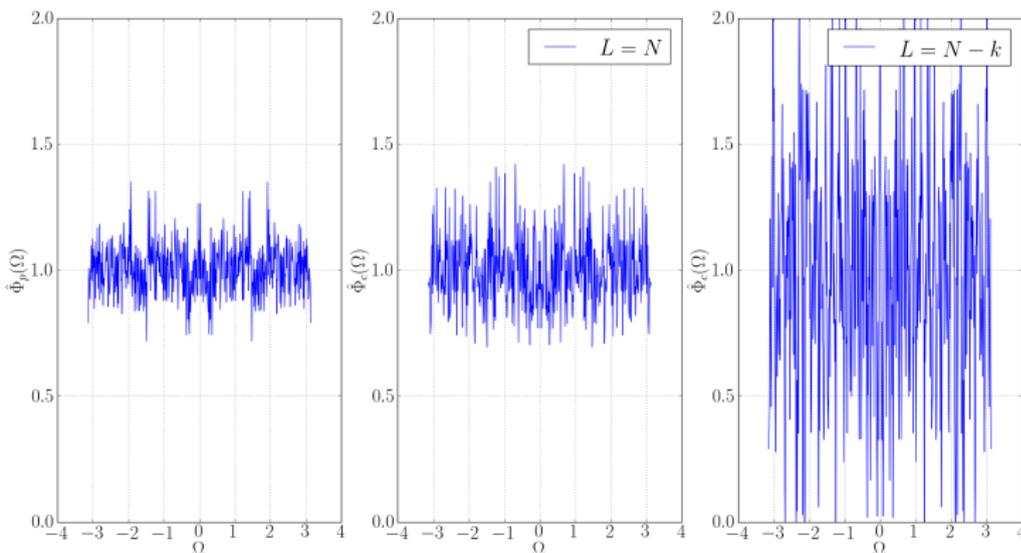
- **Theorem:** Das Periodogramm $\widehat{\Phi}_p(\Omega)$ ist ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer. Dies gilt ebenfalls für das Korrelogramm $\widehat{\Phi}_c(\Omega)$, wenn der nicht erwartungstreue AKF-Schätzer verwendet wird.
- **Nachweis:** Basierend auf dem Erwartungswerte der AKF-Schätzung folgt

$$\mathbb{E}(\widehat{\Phi}_c(\Omega)) = \mathbb{E}(\widehat{\Phi}_p(\Omega)) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \underbrace{\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)}_{:=w_B(k)} r[k] e^{-j\Omega k}$$

d.h., die AKF wird vor Schätzung der PSD implizit durch ein Dreieck gefenstert. Für $N \rightarrow \infty$ geht das Dreieck gegen 1 für jedes feste k . ■

Erwartungstreue der Schätzung

- **Beispiel:** Schätzung der PSD von weißem, gaußschen Rauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 1$



- **Erinnerung:** Bezeichnen $X(\Omega)$, $W(\Omega)$ die DTFT von $x[n]$ und $w[n]$, so gilt:

$$\text{DTFT}\{x[n] \cdot w[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\nu)W(\Omega - \nu)d\nu$$

- **Schlussfolgerung:** Wann immer ein Signal gefenstert wird, wird das wahre Spektrum mit der DTFT des Fensters gefaltet \implies Wahl des Fensters bestimmt Qualität der Schätzung
- **Fragen:** Was wäre ideal für $W(\Omega)$? Welche Fenster sind sinnvoll, in dem Sinne, dass sie eine PSD-ähnliche DTFT (≥ 0) erzeugen? \implies Diskussion wird bis zur Analyse von Blackman-Tukey zurückgestellt



■ Diskussion:

- Ideal: $W(\Omega)$ sollte ein Dirac sein
- Breite der Hauptkeule beschreibt „Verschmieren“ des Spektrum
- Aufgrund der Eigenschaften der DFT ist $1/N$ die *bestmögliche spektrale Auflösung* des Periodogramms
- Nebenkeulen übertragen Energie vom tatsächlichen Spektrum zu benachbarten Regionen.
- Im Hinblick auf Erwartungstreue sind Periodogramm und Korrelogramm gute Schätzer, da sie asymptotisch erwartungstreu sind.



- **Bemerkung:** Bei mittelwertfreien, reellwertigen Gaußverteilungen sind wir daran gewöhnt, dass die Kovarianzmatrix die gemeinsame Verteilung vollständig beschreibt. Durch Betrachtung der Anzahl an freien Werten fällt auf, dass dies für komplexwertige Gaußverteilungen nicht länger zutrifft.⁶
⇒ Anpassung notwendig

⁶**Übung:** Finden Sie ein Gegenbeispiel.



- **Definition:** Fur komplexwertige Zufallsvariablen \mathbf{X} , \mathbf{Y} lautet deren *Kovarianzmatrix*

$$C(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \mathbb{E}((\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^H)$$

und deren *Pseudo-Kovarianzmatrix*

$$\tilde{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \mathbb{E}((\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^T).$$



- **Definition:** Eine komplexwertige gaußsche Zufallsvariable $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^n$ ist *zirkulär* (korrekterweise: *zirkulärsymmetrisch*)⁷, falls sie mittelwertfrei ist und ihre Pseudo-Kovarianzmatrix identisch Null ist. Man schreibt

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}),$$

wobei $\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ die Kovarianzmatrix von \mathbf{X} ist.

- Die Wdichte einer zirkulären Gaußverteilung wird vollständig durch die Kovarianz charakterisiert und lautet

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi)^n \det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})} \exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{x})$$

⁷Die Verteilung hängt nicht vom Winkel ab: $\mathbf{X} e^{j\varphi}$ hat dieselbe Verteilung wie \mathbf{X} für jedes φ .



■ Theorem:

- Ist $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^n$ zirkulär, so ist auch $\mathbf{Y} := \mathbf{A}\mathbf{X} \in \mathbb{C}^m$ für jedes $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ zirkulär.
 - Zirkuläres komplexes Gaußrauschen maximiert die Entropie unter allen Verteilung auf \mathbb{C}^n mit gegebener Kovarianzmatrix.
 - Wird ein reellwertiges Signal mit reellwertigem schwach stationären Gaußrauschen beaufschlagt, so ist der Ausgang eines anschließenden Tiefpasses zirkulär gaußsch mit Erwartungswert Null.
- **Nachweis:** Siehe [NeMa93]

Konsequenz: Die Verwendung zirkulären Gaußrauschens ist in vielen Szenarien der Nachrichtenübertragung gerechtfertigt.

- 1-dimensionales zirkuläres komplexes Gaußrauschen $Z[n]$ erfüllt⁸

$$\mathbb{E}(Z[n]Z^*[k]) = \sigma^2\delta[n - k]$$

$$\mathbb{E}(Z[n]Z[k]) = 0$$

und

$$\mathbb{E}(\operatorname{Re}(Z[n])\operatorname{Re}(Z[k])) = \frac{\sigma^2}{2}\delta[n - k]$$

$$\mathbb{E}(\operatorname{Im}(Z[n])\operatorname{Im}(Z[k])) = \frac{\sigma^2}{2}\delta[n - k]$$

$$\mathbb{E}(\operatorname{Re}(Z[n])\operatorname{Im}(Z[k])) = 0$$

⁸Die Forderung sind widersprüchlich für reellwertiges Rauschen.

- **Theorem:** Für die Spektralschätzung von zirkulärem weißem Gaußrauschen $Z[n]$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}((\hat{\Phi}(\Omega_1) - \Phi(\Omega_1)) \cdot (\hat{\Phi}(\Omega_2) - \Phi(\Omega_2))) = \begin{cases} \Phi^2(\Omega_1), & \Omega_1 = \Omega_2 \\ 0, & \Omega_1 \neq \Omega_2 \end{cases}$$

- **Nachweis:**⁹ Einsetzen des Periodogramms¹⁰ ergibt

$$\mathbb{E}(\hat{\Phi}(\Omega_1)\hat{\Phi}(\Omega_2)) = \frac{1}{N^2} \sum_{s,t,u,v=1}^N \mathbb{E}(Z[s]Z^*[t]Z[u]Z^*[v]) \cdot e^{-j\Omega_1(s-t)} e^{-j\Omega_2(u-v)}$$

⁹Nach [StMo05].

¹⁰Periodogramm und Korrelogramm stimmen für den nicht erwartungstreuen AKF-Schätzer überein.

- **Nachweis (ctd.):** Für gemeinsam gaußverteilte mittelwertfreie ZV gilt:

$$\mathbb{E}(ABCD) = \mathbb{E}(AB)\mathbb{E}(CD) + \mathbb{E}(AC)\mathbb{E}(BD) + \mathbb{E}(AD)\mathbb{E}(BC).$$

Einsetzen der Korrelationswerte liefert:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\widehat{\Phi}(\Omega_1)\widehat{\Phi}(\Omega_2)) &= \frac{1}{N^2} \sum_{s,t,u,v=1}^N (\sigma^4 \delta_{st} \delta_{uv} + \sigma^4 \delta_{sv} \delta_{tu}) \cdot e^{-j\Omega_1(s-t)} e^{-j\Omega_2(u-v)} \\ &= \sigma^4 + \frac{\sigma^4}{N^2} \left(\frac{\sin\left((\Omega_1 - \Omega_2)\frac{N}{2}\right)}{\sin\left((\Omega_1 - \Omega_2)\frac{1}{2}\right)} \right)^2,\end{aligned}$$

womit das Theorem nachgewiesen ist. (**Übung:** Details der Schlussfolgerung) ■

- **Bemerkung:** Offensichtlich ist die untere Schranke nicht sinnvoll, da negative Werte der PSD angezeigt werden. Zur Verdeutlichung der Aussage wird die Darstellung dennoch beibehalten.
- **Theorem:**¹¹ Wird ein Signal $y[n]$ durch kausale lineare Filterung von zirkulärem, weißen Gaußrauschen $Z[n]$ erzeugt, so gilt für $N \gg 1$

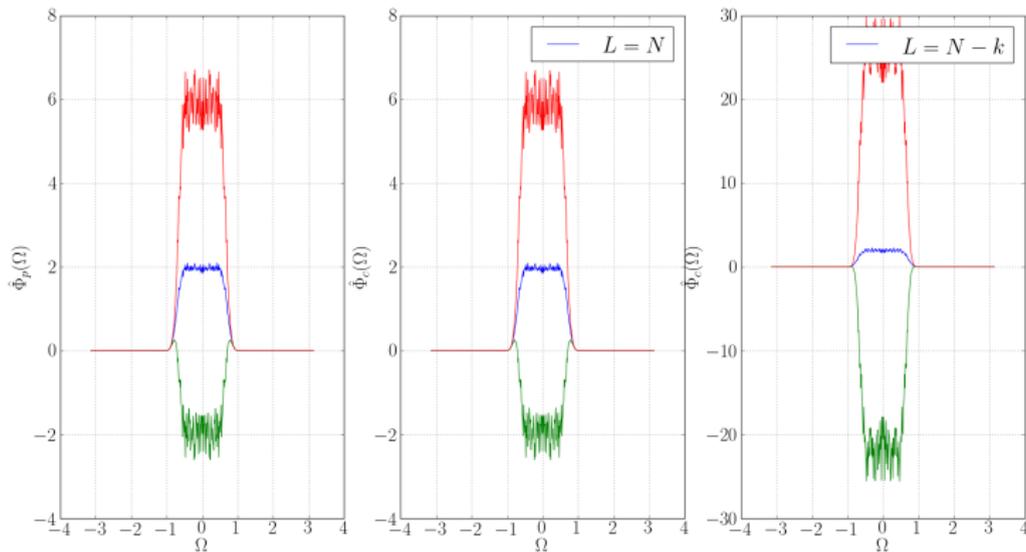
$$\hat{\Phi}_{yy}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \hat{\Phi}_{ZZ,p}(\Omega) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Also entspricht die Varianz des Schätzers asymptotisch dem Quadrat der wahren PSD.

¹¹Nach [StMo05]



- **Beispiel:** Schätzung der PSD¹² von gefiltertem weißen Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 1000 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$



¹²Man beachte die im rechten Bild geänderte y-Achse

Zwischenfazit für nicht parametrische Methoden:

- Periodogramm und Korrelogramm sind asymptotisch erwartungstreu.
- Varianz von Periodogramm und Korrelogramm ist durch das Quadrat der wahren PSD begrenzt. Eine Erhöhung von N reduziert die Varianz nicht.
⇒ Periodogramm ist *nicht konsistent*
- Geschätzte Werte der PSD sind bzgl. der Frequenzen unkorreliert.

⇒ *Verbesserungsbedarf*

- **Problem des Korrelogramms:** Grund der schlechten AKF-Schätzung:
 - große $|k| \approx N$: nur wenige Werte tragen bei, was statistische Signifikanz reduziert
 - kleine $|k| \approx 0$: viele Werte tragen bei und resultieren in einem großen Gesamtfehler, selbst für kleine Einzelfehler

- **Blackman-Tukey-Ansatz:** Verwende Fensterung

$$\hat{\Phi}_{\text{BT}}(\Omega) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w[k] \hat{r}[k] e^{-j\Omega k}, \quad M < N$$

- **Frage:** Ist $\hat{\Phi}_{\text{BT}}(\Omega)$ noch eine PSD, d.h., kann $\hat{\Phi}_{\text{BT}}(\Omega) \geq 0$ garantiert werden?
- **Erinnerung:** (Folie 21) Ein Signal $w[n]$ erfüllt $\Phi_{ww}(\Omega) \geq 0$ genau dann, wenn die Folge $w[n]$ positiv semidefinit ist, was übereinstimmt mit der positiven Semidefinitheit von

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} w[0] & w[1] & \dots & 0 \\ w[-1] & w[0] & \dots & w[M-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & w[-(M-1)] & \dots & w[0] \end{pmatrix}$$

- **Theorem:**¹³ Ist $W(\Omega) \geq 0$, d.h., $w[n]$ positiv semidefinit, dann gilt:

$$\hat{\Phi}_{\text{BT}}(\Omega) = \hat{\Phi}_{\text{p}}(\Omega) * W(\Omega) \geq 0$$

- **Nachweis:** Fenstern der AKF ergibt die neue AKF-Folge

$$\tilde{r}[k] := w[k]\hat{r}[k].$$

Die auf positive Semi-Definitheit zu untersuchende Matrix kann geschrieben werden als $\mathbf{W} \odot \hat{\mathbf{R}}$, wobei \odot die punktweise Multiplikation (*Hadamard Produkt*) bezeichnet.

Da das Hadamard-Produkt zweier positiv semi-definiter Matrizen wieder positiv semi-definit ist (siehe [StMo05]), folgt die Aussage. ■

¹³**Übung:** Warum ist das Resultat intuitiv logisch? Begründen Sie mittels des Faltungsintegrals.

- **Erinnerung:** Zeitdauer-Bandbreite-Produkt ist begrenzt \implies Signal kann nicht gleichzeitig in Zeit und Frequenz „eng“ sein
- **Folgerung 1:** Wahl der Fensterlänge ist ein Kompromiss zwischen spektraler Auflösung, Verschmieren $1/m$ und Varianz der Schätzung M/N .
- **Faustregel:** Wähle $M \leq N/10$.
- **Folgerung 2:** Wahl der Fensterform ist ein Kompromiss zwischen spektraler Auflösung und Leakage.



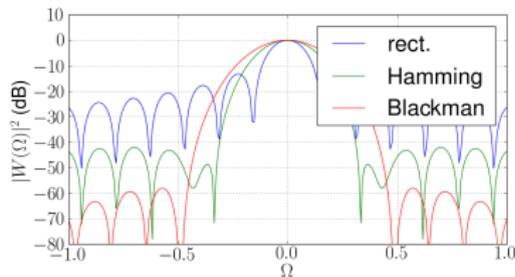
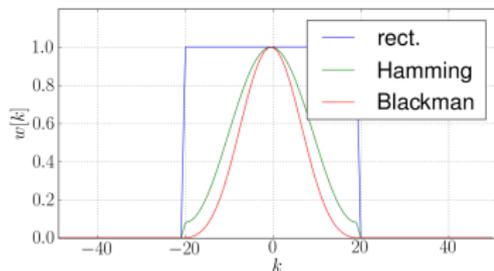
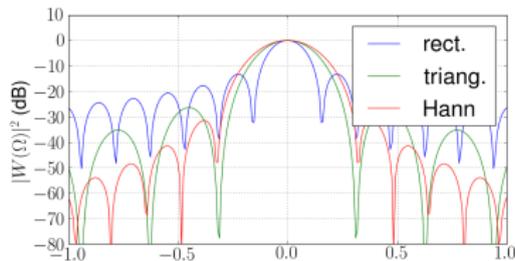
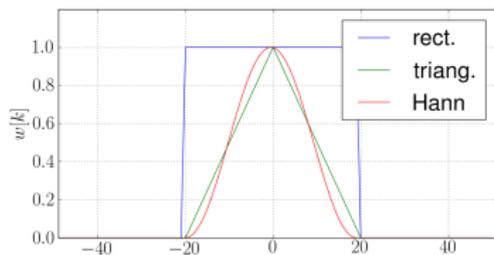
| <i>Fenster</i> | $w[k]$ ¹⁴ | <i>Breite der Hauptkeule (rads)</i> | <i>Dämpfung Nebenkeule (dB)</i> |
|----------------|--|-------------------------------------|---------------------------------|
| Rectangular | 1 | $\frac{2\pi}{M}$ | -13 |
| Bartlett | $1 - \frac{k}{M}$ | $\frac{4\pi}{M}$ | -25 |
| Hann (Hanning) | $0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi k}{M}\right)$ | $\frac{4\pi}{M}$ | -31 |
| Hamming | $0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi k}{M}\right)$ | $\frac{4\pi}{M}$ | -41 |
| Blackman | $0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi k}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right)$ | $\frac{6\pi}{M}$ | -57 |

¹⁴Angabe für $k = 0, \dots, M - 1$, fortgesetzt durch $w[-k] = w[k]$ und $w[k] = 0$ für $|k| > M - 1$.

¹⁵Tabelle nach [StMo05] bzw. [RG75]

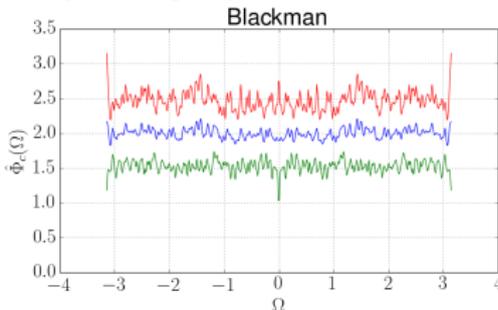
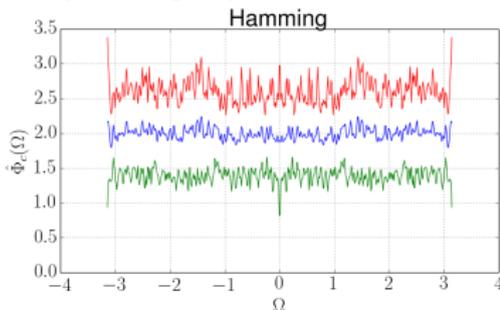
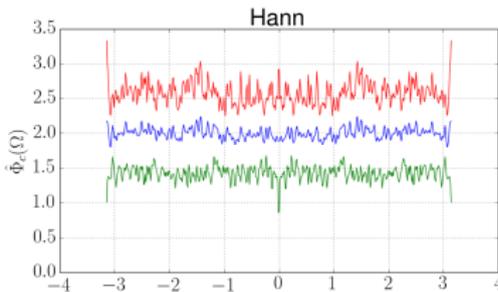
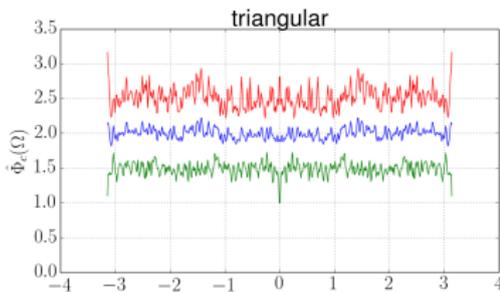


■ Beispiel: Fenster und deren Leistungsdichte

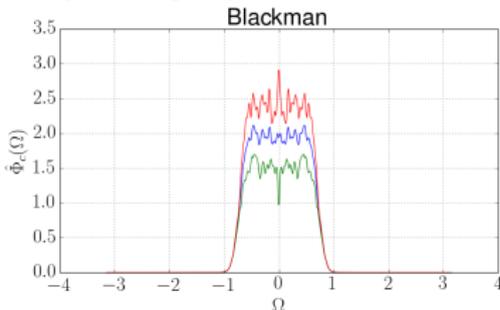
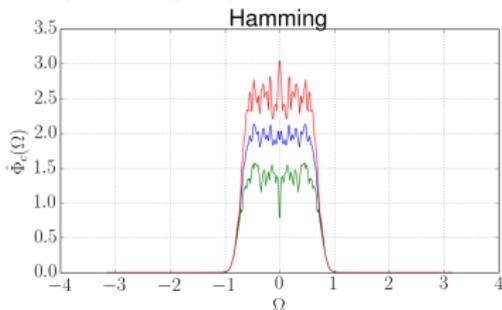
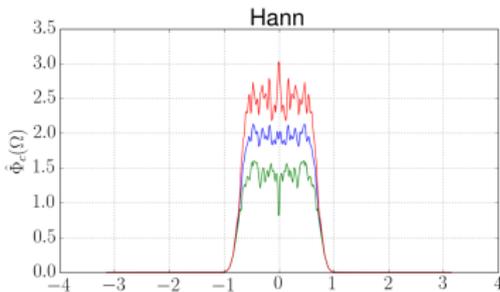
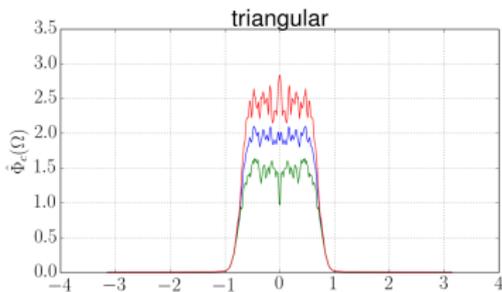


Blackman-Tukey: Fenster

- **Beispiel:** Schätzung der PSD von weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$, und mit $M = N/5$



- **Beispiel:** Schätzung der PSD von gefiltertem, weißen Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$, und mit $M = N/5$



- **Idee:** Reduziere Varianz des Periodogramms durch Mittelung
 - Teile N Beobachtungen in $L = N/M$ Gruppen¹⁶ zu $M = N/L$ Samples¹⁷

$$y_j[n] := y[(j-1)M + n], \quad n = 1, \dots, M, j = 1, \dots, L$$

- Bestimme „einzelne“ Spektralschätzungen

$$\hat{\Phi}_j(\Omega) := \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \left| y_j[n] e^{-j\Omega n} \right|^2$$

- Mittlung der Schätzungen gemäß

$$\hat{\Phi}_B(\Omega) := \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \hat{\Phi}_j(\Omega)$$

¹⁶Zur Vereinfachung wird Teilbarkeit angenommen.

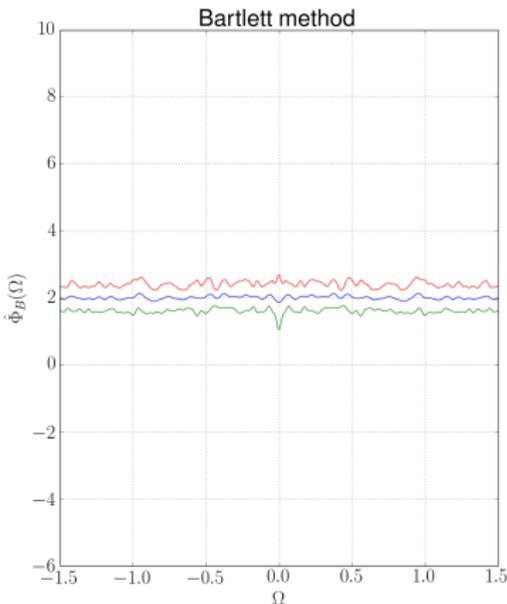
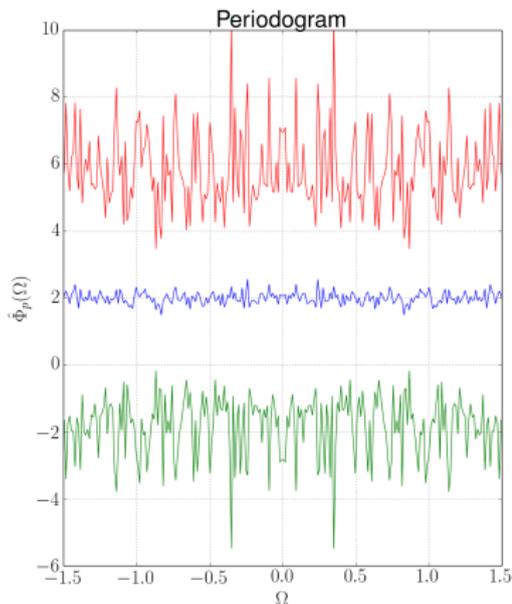
¹⁷Parameter M sollte nicht mit Parameter M in Blackman-Tukey verwechselt werden.

- **Theorem:** Die Bartlett-Methode entspricht Blackman-Tukey mit Rechteckfenster und Mittelung der AKFs.
- **Bemerkungen:**
 - Was sind Erwartungswert und Varianz des Bartlett-Schätzers?
 - Teilsequenzen der Länge $M \implies$ Auflösung $1/M$
 - Varianz der Schätzung skaliert mit $1/L = M/N$
 - Zitat¹⁸: „Bartlett method has least smearing but most leakage in the class of all Blackman-Tukey estimates“.

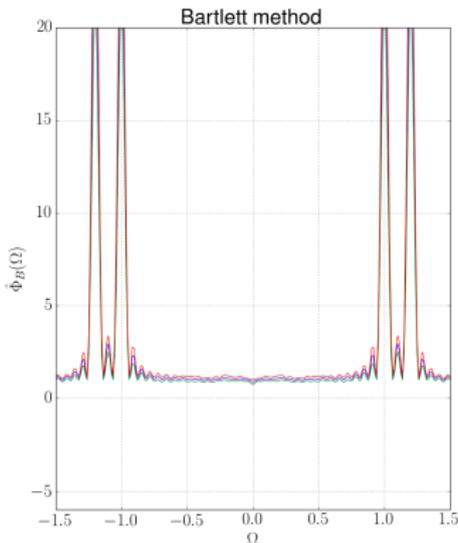
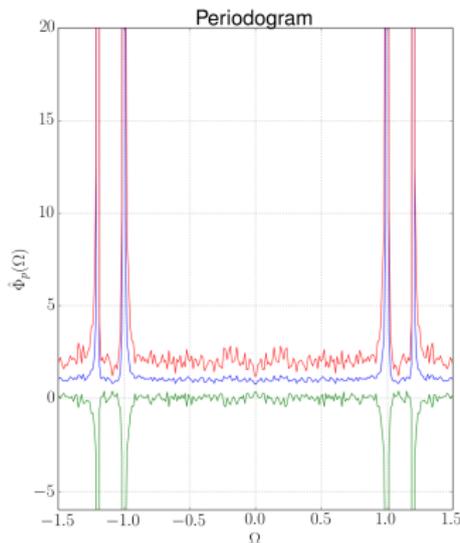
¹⁸Nach [StMo05].



- **Beispiel:** Schätzung der PSD von weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$, und mit $M = N/10$



- **Beispiel:** Schätzung der PSD¹⁹ von 2 Sinus-Funktionen ($\Omega_1 = 1.0, \Omega_2 = 1.2$) plus weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 1$, und mit $M = N/10$



¹⁹**Hinweis:** Aufgrund der „Diracform“ des Spektrum ist hier die lineare Darstellung gewählt.

- **Idee:** Verbesserung der Nachteile von Bartlett
 - Segmente dürfen überlappen (empfohlen $K = M/2$)

$$y_j[n] := y[(j-1)K + n], \quad n = 1, \dots, M, j = 1, \dots, S$$

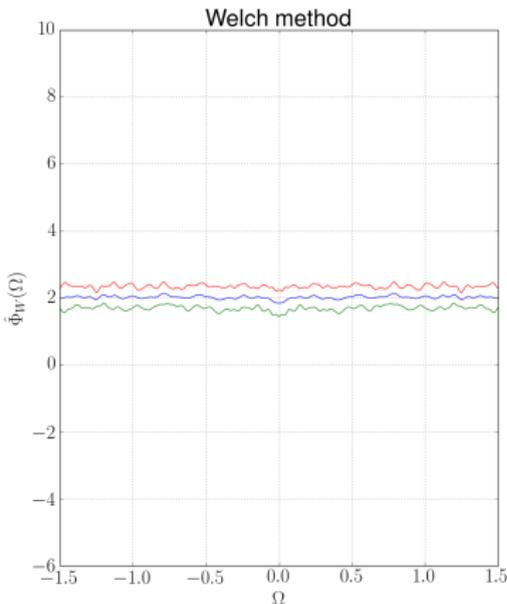
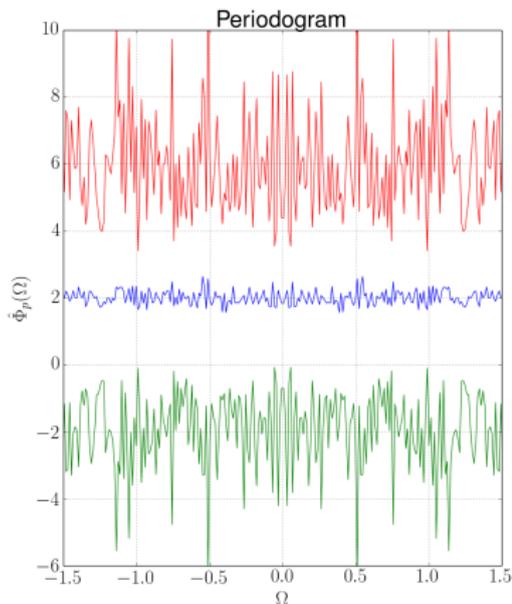
- Segmente werden gefenstert und normiert

$$\hat{\Phi}_j(\Omega) := \frac{1}{PM} \sum_{n=1}^M |v[n]y_j[n]e^{-j\Omega n}|^2, \quad P := \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |v[n]|^2$$

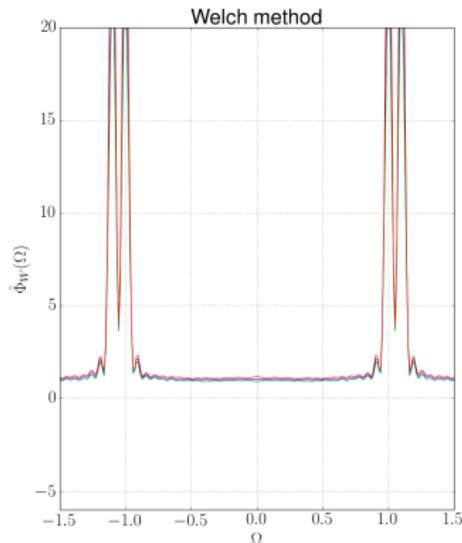
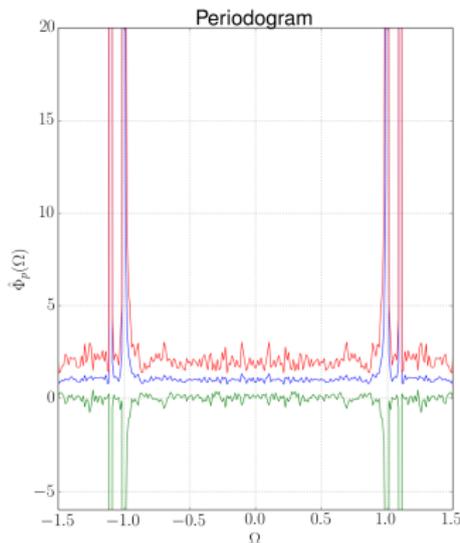
- Schätzungen werden gemittelt gemäß

$$\hat{\Phi}_W(\Omega) := \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S \hat{\Phi}_j(\Omega)$$

- **Beispiel:** Schätzung der PSD von weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$, und mit $M = N/10$, $K = M/2$



- **Beispiel:** Schätzung der PSD²⁰ von zwei Sinus-Funktionen ($\Omega_1 = 1.0, \Omega_2 = 1.2$) plus weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 1$, und mit $M = N/10, K = M/2$



²⁰**Hinweis:** Aufgrund der „Diracform“ des Spektrum ist hier die lineare Darstellung gewählt.

■ Bemerkungen:²¹

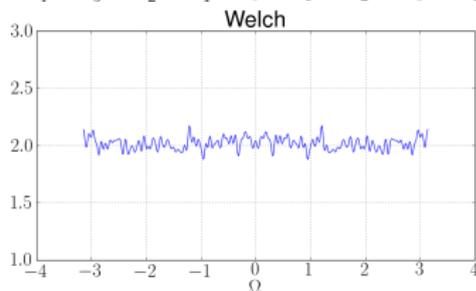
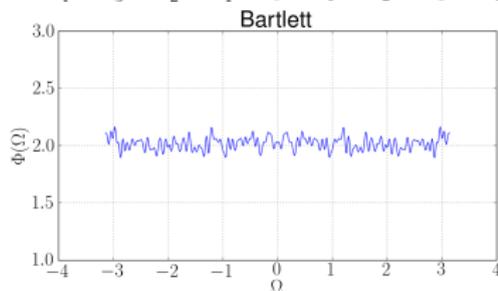
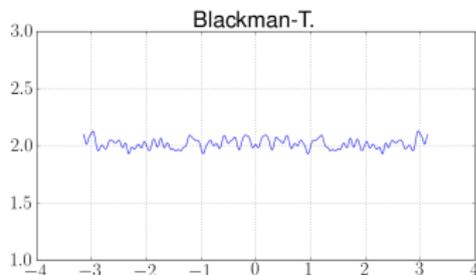
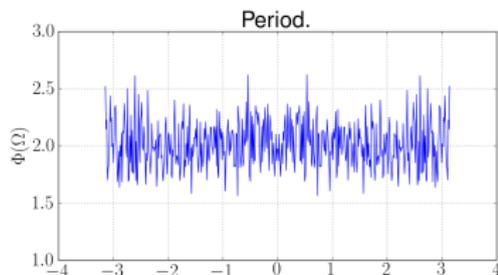
- Es kann gezeigt werden, dass die Welch-Methode einem „*Blackman-Tukey type*“ entspricht
- Die Welch-Methode ist einer der am meisten verwendeten PSD-Schätzer
- *Daniell* schlägt vor, die Varianz des Spektrogramms zu reduzieren, indem entlang der Frequenzachse gemittelt wird: Die benachbarten Schätzwerte haben Einfluss und Schätzwerte sind nicht mehr unkorreliert.

²¹Nach [StMo05].



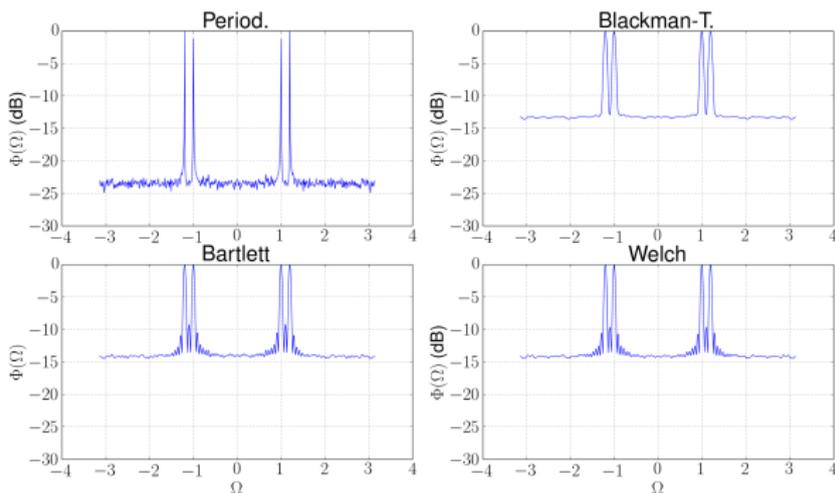
Nicht-Parametrische Methoden: Vergleich

- **Beispiel:** Schätzung der PSD von weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$, mit $M = N/10$, $K = M/2$



Nicht-Parametrische Methoden: Vergleich

- **Beispiel:** Schätzung der PSD²² von zwei Sinusfunktionen ($\Omega_1 = 1.0, \Omega_2 = 1.2$) mit weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 1$, mit $M = N/10, K = M/2$



²²**Hinweis:** Hier ist trotz der „Diracform“ des Spektrum die logarithmische Darstellung gewählt.

4 Spektralschätzung

- Einführung und Problemstellung
- Wie definiert man eine Leistungsdichte für stochastische Prozesse?
- Nicht-parametrische Methoden
- **Parametrische Methoden**
 - Rationale Spektren, ARMA-Modelle
 - Yule-Walker-Gleichungen
 - Levinson-Durbin-Algorithmus
 - Methoden für Linienspektren: MUSIC und ESPRIT
- Lernzielkontrolle
- Literatur



- **Idee:** Annahme der Gültigkeit eines Modell und „nur“ Schätzen der Modellparameter
- Oft: Frequenzgang ist rationale Funktion²³ \implies schätze rationale Spektren der Form

$$\Phi(\Omega) = \sigma^2 \frac{|B(\Omega)|^2}{|A(\Omega)|^2}$$

und im z-Bereich

$$\Phi(z) = \sigma^2 \frac{B(z)B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A(z)A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)},$$

wobei $A(z)$, $B(z)$ Polynome sind.

²³**Bemerkung:** (nach [StMo05]) Alternative Begründung für die Betrachtung rationaler Spektren ist die Tatsache, dass rationale Frequenzgänge in der Menge aller Frequenzgänge „dicht liegen“; siehe Weierstrass-Theorem.



- Wird ein System mit Frequenzgang $H(\Omega)$ durch einen Eingang mit PSD $\Phi_{\text{in}}(\Omega)$ angeregt, so ist die PSD des Ausgangs

$$\Phi_{\text{out}}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \cdot \Phi_{\text{in}}(\Omega)$$

- Damit beschreibt²⁴

$$\Phi(\Omega) = \sigma^2 \frac{|B(\Omega)|^2}{|A(\Omega)|^2}$$

den Ausgang eines Filters mit Frequenzgang $H(\Omega) = B(\Omega)/A(\Omega)$, falls der Eingang weißes Rauschen mit Leistung σ^2 ist \implies Identifiziere Systemparameter statt PSD-Parameter.

²⁴Es wird angenommen, dass der Einheitskreis im Konvergenzgebiet liegt, so dass $\Phi(\Omega) = \Phi(z = e^{j\Omega})$.



- Signalmodell wird zu

$$\sum_{\nu=0}^q a_{\nu} y[t - \nu] = \sum_{\mu=0}^p b_{\mu} z[t - \mu], \quad a_0 = b_0 = 1$$

wobei $z[t]$ weißes Rauschen mit Leistung σ^2 ist. Dieses Modell nennt man

- *Moving Average, MA*, falls $q = 0$
- *Auto Regressive, AR*, falls $p = 0$
- *ARMA*, falls $q > 0, p > 0$

- **Ansatz:** Korrelation beider Seiten des ARMA-Modells mit $y^*[t - k]$ liefert

$$r[k] + \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} r[k - \nu] = \sum_{\mu=0}^p b_{\mu} \mathbb{E}(z[t - \mu] y^*[t - k])$$

- Zur weiteren Vereinfachung wird angenommen, dass $y[t]$ durch kausales Filtern von weißem Rauschen $z[t]$ durch ein Filter mit Impulsantwort $h[n]$ entstanden ist:

$$y[t] = \sum_{s=0}^{\infty} h[s] z[t - s].$$

Aufgrund Weißheit des Rauschens folgt damit

$$\mathbb{E}(z[t - \mu] y^*[t - k]) = \sigma^2 h^*[\mu - k].$$

- Einsetzen liefert

$$r[k] + \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} r[k - \nu] = \sigma^2 \sum_{\mu=0}^p b_{\mu} h^{*}[\mu - k]$$

- Wegen $h[p] = 0$ für $p < 0$ ergibt sich

$$r[k] + \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} r[k - \nu] = 0, k > p$$



- Für *AR-Signale* ergeben sich die *Yule-Walker-Gleichungen*

$$r[k] + \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} r[k - \nu] = 0, \quad k > 0$$
$$r[0] + \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} r[-\nu] = \sigma^2$$

welche die Koeffizienten a_{ν} eines ARMA-Prozesses auf seine AKF beziehen.

- Die Yule-Walker-Gleichungen können in Matrix-Vektor-Form geschrieben werden,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r[0] & r[-1] & \dots & r[-q] \\ r[1] & r[0] & \dots & r[-(q-1)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r[q] & r[q-1] & \dots & r[0] \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{R}_{q+1}^{YW}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix}}_{=:(1, \theta_q)^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:(\sigma_q^2, \mathbf{0})^T},$$

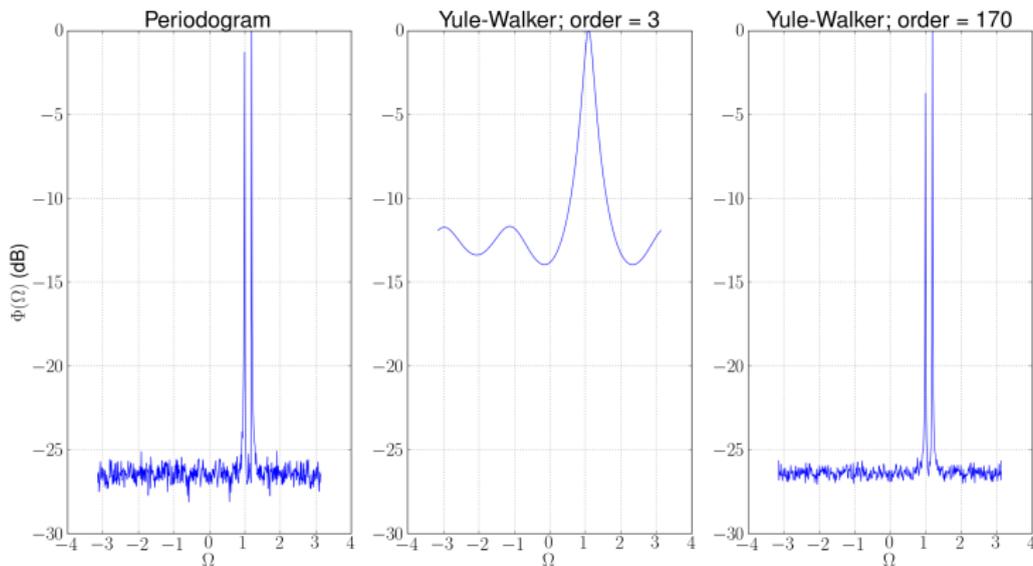
woraus mit den obigen Definitionen folgt:

$$\mathbf{R}_{q+1}^{YW} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

■ Bemerkungen zu Yule-Walker:

- Verwendet man den nicht erwartungstreuen Schätzer für die AKF und löst die Gleichung, so entspricht dies der *Yule-Walker-Methode*.
- Die Yule-Walker-Methode entspricht dem optimalen linearen Prädiktor \implies Modellierung über einen AR-Prozess wird auch *linear prediction modeling* genannt.
- Verwendung der Yule-Walker-Methode nimmt an, dass die Systemordnung q bekannt ist; ist das nicht der Fall, so müssen alle Werte von q bis zu einer maximalen Ordnung q_{\max} analysiert werden.
- Da die aus AKFs aufgebauten Matrizen konjugierte Symmetrie besitzen ($r[-\ell] = r^*[\ell]$), stellt man fest, dass die Matrix in den Yule-Walker-Gleichungen gerade $\mathbf{R}^{\text{YW}} = \mathbf{R}^{\text{T}}$ entspricht, wobei \mathbf{R} die Autokorrelationsmatrix ist.
Somit wirkt die Verwendung eines zusätzlichen Index seltsam, hilft aber (hoffentlich) Verwirrung zu vermeiden.

- **Beispiel:** Schätzung der PSD zweier Sinussignale ($\Omega_1 = 1.0, \Omega_2 = 1.2$) mit weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$



- *Levinson-Durbin-Algorithmus*: Rekursive Lösung der Yule-Walker-Gleichungen

- **Notation:**

- ρ_k bezeichnet sowohl $r[k]$ als auch seine Schätzung $\hat{r}[k]$
- \mathbf{x}^H bezeichnet Transposition und komplexe Konjugation von \mathbf{x}
- Mit

$$\mathbf{r}_q := (\rho_1, \dots, \rho_q)^T$$

$$\mathbf{r}_{q,\leftarrow} := (\rho_q^*, \dots, \rho_1^*)^T$$

kann gezeigt werden (**Übung**: Ausarbeiten), dass für jede Hermitesche Toeplitz Matrix \mathbf{R} gilt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x} \implies \mathbf{y}_{\leftarrow} = \mathbf{R}\mathbf{x}_{\leftarrow}$$



- *Levinson-Durbin-Algorithmus:*

- Beachte

$$\mathbf{R}_{q+2}^{YW} = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{R}_{q+1}^{YW} & & \rho_{q+1}^* \\ \hline \rho_{q+1} & \mathbf{r}_{q,\leftarrow}^* & \mathbf{r}_{q,\leftarrow} \\ \hline & & \rho_0 \end{array} \right)$$

und damit

$$\mathbf{R}_{q+2}^{YW} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 \\ \mathbf{0} \\ \rho_{q+1} + \mathbf{r}_{q,\leftarrow}^* \theta_q \end{pmatrix}$$

- Wir stellen fest, dass die Ergebnisse sehr ähnlich sind zu

$$\mathbf{R}_{q+2}^{YW} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{q+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{q+1}^2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$



- *Levinson-Durbin-Algorithmus (ctd.):*

- Definiere

$$\alpha_q := \rho_{q+1} + \mathbf{r}_{q,\leftarrow}^* \theta_q$$

und die *reflection coefficients*

$$k_{q+1} := -\frac{\alpha_q}{\sigma_q^2} = -\frac{\rho_{q+1} + \mathbf{r}_{q,\leftarrow}^* \theta_q}{\sigma_q^2}$$

- **Bemerkung:** $-k_n$ heißen auch *Partial Correlation (PARCOR) coefficients*

- *Levinson-Durbin-Algorithmus (ctd.):*

- Wegen

$$\mathbf{R}_{q+2}^{YW} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{q,\leftarrow} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{q+2}^{YW} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_q \\ 0 \end{pmatrix}_{\leftarrow} = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 \\ \mathbf{0} \\ \alpha_q \end{pmatrix}_{\leftarrow} = \begin{pmatrix} \alpha_q^* \\ \mathbf{0} \\ \sigma_q^2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\mathbf{R}_{q+2}^{YW} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \theta_q \\ 0 \end{pmatrix} + k_{q+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{q,\leftarrow} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 \\ \mathbf{0} \\ \alpha_q \end{pmatrix} + k_{q+1} \begin{pmatrix} \alpha_q^* \\ \mathbf{0} \\ \sigma_q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 + k_{q+1} \alpha_q^* \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Levinson-Durbin-Algorithmus (ctd.):

- Bisher erarbeitet:

$$\mathbf{R}_{q+2}^{YW} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \theta_q \\ 0 \end{pmatrix} + k_{q+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{q,\leftarrow} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 + k_{q+1}\alpha_q^* \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}_{q+2}^{YW} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{q+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{q+1}^2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Die Eindeutigkeit der Lösung (\mathbf{R}_{q+2}^{YW} ist positiv definit, [StMo05]) liefert:

$$\theta_{q+1} = \begin{pmatrix} \theta_q \\ 0 \end{pmatrix} + k_{q+1} \begin{pmatrix} \theta_{q,\leftarrow} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{q+1}^2 = \sigma_q^2 (1 - |k_{q+1}|^2)$$

■ Levinson-Durbin-Algorithmus (ctd.): Pseudo-Code

% Initialisierung

$$\theta_1 := -\rho_1/\rho_0$$

$$k_1 := \theta_1$$

$$\sigma_1^2 := \rho_0 - |\rho_1|^2/\rho_0$$

% Schleife

for $q = 1$ to q_{\max} :

$$k_{q+1} := -(\rho_{q+1} + \mathbf{r}_{q,\leftarrow}^* \theta_q) / \sigma_q^2$$

$$\sigma_{q+1}^2 := \sigma_q^2 (1 - |k_{q+1}|^2)$$

$$\theta_{q+1} := \begin{pmatrix} \theta_q \\ 0 \end{pmatrix} + k_{q+1} \begin{pmatrix} \theta_{q,\leftarrow} \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ Burg-Methode:

- **Idee:** Führe Vorwärts- und Rückwärts-Prädiktion des Signals $y[t]$ mit Ordnung p durch:

$$\hat{e}_{f,p}[t] := y[t] + \sum_{i=1}^p \hat{a}_{p,i} y[t - i], \quad t = p + 1, \dots, N$$

$$\hat{e}_{b,p}[t] := y[t - p] + \sum_{i=1}^p \hat{a}_{p,i} y[t - p + i], \quad t = p + 1, \dots, N$$

- **Bemerkung:** Es kann gezeigt werden²⁵, dass die Koeffizienten der Rückwärtsprädiktion sich als komplex Konjugierte der Koeffizienten der Vorwärtsprädiktion ergeben.

²⁵Siehe [StMo05]

- *Burg-Methode (ctd.):*

- Die AR-Parameter sind direkt mit den reflection coefficients verbunden,

$$\hat{a}_{p,i} = \begin{cases} \hat{a}_{p-1,i} + \hat{k}_p \hat{a}_{p-1,p-i}^*, & i = 1, \dots, p-1 \\ \hat{k}_p, & i = p, \end{cases}$$

und die Prädiktionsfehler ergeben sich zu

$$\hat{e}_{f,p}[t] = \hat{e}_{f,p-1}[t] + \hat{k}_p \hat{e}_{b,p-1}[t-1]$$

$$\hat{e}_{b,p}[t] = \hat{e}_{b,p-1}[t-1] + \hat{k}_p^* \hat{e}_{f,p-1}[t]$$

■ Burg-Methode (ctd.):

- Annahme: AR-Koeffizienten bis zur Ordnung $p - 1$ wurden berechnet
- Berechnung der minimalen Prädiktionsleistung

$$\arg \min_{\hat{k}_n} \frac{1}{N - p} \left(\sum_{t=p+1}^N |\hat{e}_{f,p}[t]|^2 + \sum_{t=p+1}^N |\hat{e}_{b,p}[t]|^2 \right)$$

liefert

$$\hat{k}_n = \frac{-2 \sum_{t=p+1}^N \hat{e}_{f,p-1}[t] \hat{e}_{b,p-1}^*[t-1]}{\sum_{t=p+1}^N (|\hat{e}_{f,p-1}[t]|^2 + |\hat{e}_{b,p-1}[t-1]|^2)}$$

- *Burg-Methode (ctd.):*

- **Algorithm:**

- Initialisierung
 - Für alle Prädiktionsordnungen
 - Bestimmte Vorwärts- und Rückwärts-Prädiktionsfehler der Ordnung $p - 1$
 - Bestimme reflection coefficient der Ordnung p
 - Bestimme AR-Parameter der Ordnung p



■ Bemerkungen:²⁶

- Parametrische Modell erfordern gute Modellierung; andernfalls ergeben sich durch Mismatching schlechte Ergebnisse der Spektralschätzung
- AR-Modelle liefern gute Ergebnisse bei schmalbandigen Spektren
- AR-Modelle ergeben lineare Gleichungen für die gesuchten Koeffizienten
- MA und ARMA-Modelle resultieren in nicht-linearen Gleichungen und sind schwieriger zu analysieren
- MA-Modelle eigenen sich für breitbandige Spektren mit „scharfen“ Nullen
- MA-Modelle haben meist höhere Ordnung als AR-Modelle

²⁶Nach [StMo05]

- **Ziel:**²⁷ Schätze Frequenzen in dem Modell²⁸

$$y[t] = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{j(\Omega_i t + \phi_i)} + n[t]$$

- Sind die Phasen gleichverteilt und unabhängig, so folgt²⁹

$$r[k] = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 e^{j\Omega_i k} + \sigma^2 \delta[k]$$

$$\Phi(\Omega) = 2\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \delta(\Omega - \Omega_i) + \sigma^2$$

²⁷Wieder mal nach [StMo05]

²⁸... n ist *nicht* mit der Rauschgröße $n[t]$ zu verwechseln.

²⁹**Übung:** Nachweis; Einsetzen in die Formel für die Rücktrafo.

- Für die natürliche Zahl m definiere

$$\mathbf{a}(\Omega) := \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j\Omega} \\ \vdots \\ e^{-j(m-1)\Omega} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$$

und

$$\mathbf{A} := [\mathbf{a}(\Omega_1), \dots, \mathbf{a}(\Omega_n)] \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

- **Bemerkung:** $\mathbf{a}(\Omega)$ entspricht (bei normierter Abtastzeit) den Samples einer Schwingung der Frequenz $\Omega \implies \mathbf{A}$ enthält in den Spalten die Samples von Schwingungen der Frequenzen $\Omega_1, \dots, \Omega_n$.



- Mit den entsprechenden Definitionen ergibt sich (**Übung: Nachweis**³⁰)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y[t] \\ \vdots \\ y[t - (m - 1)] \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{y}[t]} = \mathbf{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{j\Omega_1 t + j\phi_1} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{j\Omega_n t + j\phi_n} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{x}[t]} + \underbrace{\begin{pmatrix} n[t] \\ \vdots \\ n[t - (m - 1)] \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{n}[t]}$$

und die Korrelationsmatrix wird zu

$$\mathbf{R} := E(\mathbf{y}[t]\mathbf{y}^H[t]) = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

$$\mathbf{P} := \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2).$$

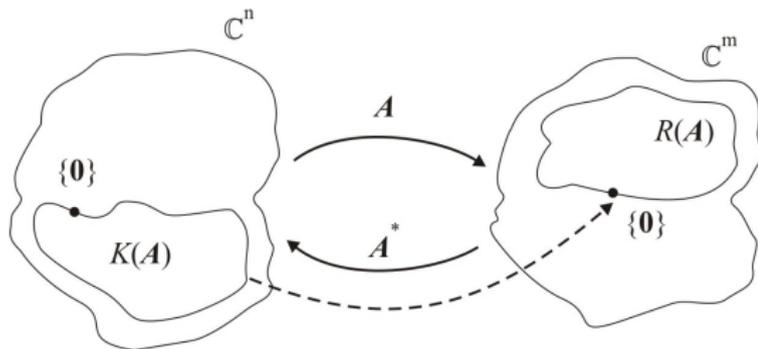
³⁰Analysieren Sie die Auswirkung eines Delay auf das Signalmodell.

- **Definition:** Für $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ definiert man *Bildbereich*, *Rang* und *Kern* als:

$$R(A) := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m : \text{ex. } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \text{ mit } A\mathbf{x} = \mathbf{y} \}$$

$$\text{rk}(A) := \dim(R(A))$$

$$K(A) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$



- **Eigenschaften:** Für $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ folgt:

$$R(\mathbf{B}) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$$

$$\text{rk}(\mathbf{B}) \leq \min\{m, n\}$$

$$\text{rk}(\mathbf{B}) = \text{rk}(\mathbf{B}^H)$$

$$R(\mathbf{B}) = K(\mathbf{B}^H)^\perp$$

$$\text{rk}(\mathbf{B}) + \dim(K(\mathbf{B})) = n$$

$$\text{rk}(\mathbf{B}^H) + \dim(K(\mathbf{B}^H)) = m$$

$$\text{rk}(\mathbf{B}^H \mathbf{B}) = \text{rk}(\mathbf{B})$$

- **Definition:** Ein *Eigenwert* λ zum *Eigenvektor* x der Matrix $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ist charakterisiert durch

$$Bx = \lambda x.$$

- **Theorem:** Jede normale Matrix³¹ $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ist *diagonalisierbar* durch eine unitäre³² Matrix, d.h., es existiert eine unitäre Matrix³³ $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{C}^{m \times m}$, so dass

$$B = X\Lambda X^H.$$

Die Matrizen X und Λ enthalten m Eigenvektoren und m Eigenwerte.

³¹Eine Matrix heißt *normal*, falls $BB^H = B^H B$.

³²Eine Matrix ist *unitär*, falls $BB^H = B^H B = I$.

³³ A unitär \implies Zeilen und Spalten sind orthonormal und linear unabhängig.



- **Name:** Multiple Signal Characterization
- **Annahme:** $m > n$, d.h., es existieren mehr Beobachtungen als Frequenzen
- **Bemerkungen:**
 - Oft werden MUSIC (und ESPRIT) als *super-resolution* Methoden bezeichnet, da die Auflösung besser als $1/\text{Beobachtungslänge}$ sein kann.
 - Die folgenden Methoden (MUSIC und ESPRIT) erfordern weißes Rauschen; ist dies nicht gegeben, muss vorher ein Whitening durchgeführt werden.

- $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ist eine Kovarianzmatrix und damit hermitesch ($\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$) \implies \mathbf{R} ist diagonalisierbar mit Matrizen \mathbf{X} und $\mathbf{\Lambda}$,

$$\mathbf{R} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^H,$$

und die Eigenwerte sind reellwertig, $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

- **Annahme:** Eigenwerte sind absteigend geordnet $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$



- Rang von³⁴ \mathbf{R} ist m [StMo05]; $\text{rk}(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H) = n \implies$

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \sigma^2 = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_m$$

- Zuordnung der Eigenvektoren gemäß

$$\mathbf{S} := [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$\mathbf{G} := [\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_m] \in \mathbb{C}^{m \times (m-n)},$$

definiert einen *Signal-Raum* und *Rausch-Raum* als $R(\mathbf{S})$ und $R(\mathbf{G})$.

³⁴ **Erinnerung:** $m > n$, $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}$; $\mathbf{P} = \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$.



- Einerseits ist

$$RG = \sigma^2 G$$

und andererseits

$$RG = APA^H G + \sigma^2 G;$$

somit folgt $APA^H G = 0$.

- Da AP vollen Rang hat, ergibt sich $A^H G = 0$ und damit $g_i \in K(A^H)$.
Somit folgt:

$$R(G) \subseteq K(A^H).$$

- Aber $|K(A^H)| = m - n$ und $|R(G)| = m - n$, also folgt:

$$R(G) = K(A^H).$$



- Da \mathbf{X} unitär ist, sind dessen Spalten orthonormal; damit folgt

$$\mathbf{S}^H \mathbf{G} = \mathbf{0}.$$

In Konsequenz gilt $K(\mathbf{A}^H) = R(\mathbf{G}) \subseteq K(\mathbf{S}^H)$.

- Da $K(\mathbf{A}^H)$ und $K(\mathbf{S}^H)$ dieselbe Dimension besitzen ergibt sich $K(\mathbf{S}^H) = K(\mathbf{A}^H)$ und daraus³⁵

$$R(\mathbf{S}) = R(\mathbf{A}).$$

³⁵ . . . was die Bezeichnung „Signal-Raum“ rechtfertigt..

Theorem

Die Frequenzen $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ sind die n eindeutigen Lösungen von

$$\mathbf{a}(\Omega)^H \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\Omega) = 0, \quad m > n.$$

- **Nachweis:** 1. Wegen $\mathbf{A}^H \mathbf{G} = \mathbf{0}$ folgt, dass $\mathbf{a}(\Omega_i)^H \mathbf{G} = \mathbf{0}$, somit ist jedes Ω_i eine Lösung.
 - 2. Angenommen $\Omega \neq \Omega_i$ sei eine Lösung. Wegen $\mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\Omega) \in R(\mathbf{G})$ folgt $\mathbf{a}(\Omega) \perp R(\mathbf{G})$. $\implies \mathbf{a}(\Omega) \in K(\mathbf{G}^H)$.
- Da aber $\mathbf{a}(\Omega)$ linear unabhängig von $\mathbf{a}(\Omega_i)$ ist, wäre die Dimension von $K(\mathbf{G}^H)$ mindestens $n + 1$, was einen Widerspruch darstellt. ■

■ Bemerkungen:

- Zur numerischen Stabilität werden die n Peaks des *Pseudo-Spektrums*

$$\Phi_{\text{MUSIC}}(\Omega) = \frac{1}{\mathbf{a}(\Omega)^H \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\Omega)} = \frac{1}{\|\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\Omega)\|^2}$$

bestimmt.

- Realisierung des Algorithmus wird mittels Schätzung der Korrelationsmatrix durchgeführt,

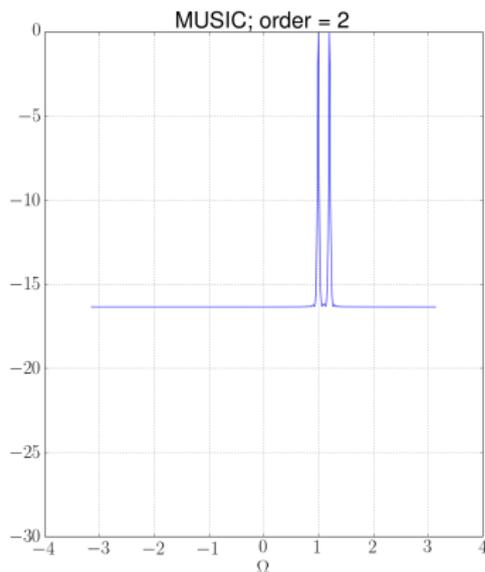
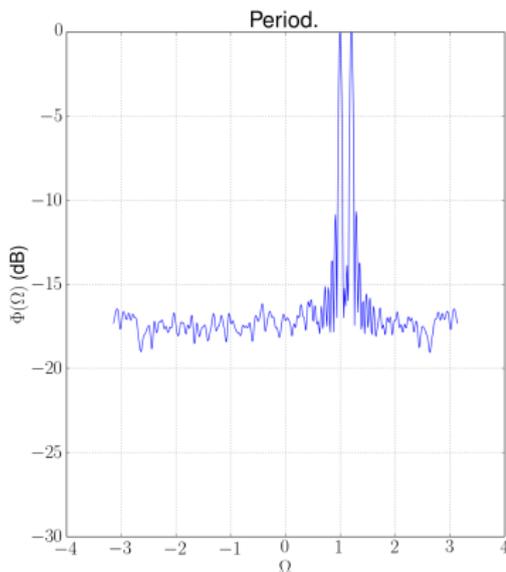
$$\hat{\mathbf{R}} := \frac{1}{N} \sum_{t=m}^N \mathbf{y}[t] \mathbf{y}^H[t]$$

wobei N eine hinreichend Anzahl von Beobachtungen darstellt.

- Mittels $\mathbf{a}(z) := (1, z^{-1}, \dots, z^{-(m-1)})^T$ wird der zweite Teil des Theorems zur direkten Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra.
- Methode von *Pisarenko* entspricht MUSIC mit $m = n + 1$.



- **Beispiel:** Pseudo-Spektrum zweier Sinusfunktionen ($\Omega_1 = 1.0, \Omega_2 = 1.2$) mit weißem Gaußrauschen, 1000 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$ und $n = 2$



- **Name:** Estimation of Signal Parameters by Rotational Invarianz Techniques
- **Annahme:** A , R , S wie in MUSIC

- Definiere

$$\mathbf{A}_1 := [\mathbf{I}_{m-1} \ \mathbf{0}] \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_2 := [\mathbf{0} \ \mathbf{I}_{m-1}] \mathbf{A},$$

d.h., durch Elimination der letzten und ersten Zeile von A . Dann:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} := \text{diag}(e^{-j\Omega_1}, \dots, e^{-j\Omega_n}).$$

Entsprechend definiere $\mathbf{S}_1 := [\mathbf{I}_{m-1} \ \mathbf{0}] \mathbf{S}$ und $\mathbf{S}_2 := [\mathbf{0} \ \mathbf{I}_{m-1}] \mathbf{S}$.

- Unter Berücksichtigung von $R = APA^H + \sigma^2 I$ folgt

$$RS = APA^H S + \sigma^2 S$$

und damit (**Übung:** Nachweis³⁶)

$$S = AC \quad \text{mit} \quad C = PA^H S (\Lambda - \sigma^2 I)^{-1}$$

- Kombination mit den bisherigen Erkenntnissen liefert

$$S_2 = A_2 C = A_1 D C = S_1 C^{-1} D C =: S_1 \Phi$$

Beachte, dass C regulär ist und A_1, A_2 vollen Spaltenrang n haben, dann:

$$\Phi = (S_1^H S_1)^{-1} S_1^H S_2$$

³⁶Hinweis: Eigenwert-Zerlegung von R ; bedenken Sie, dass Diagonalmatrizen kommutativ sind.

Theorem

Frequenzschätzungen gemäß ESPRIT ergeben sich über

$$\hat{\Omega}_i := -\arg(\hat{\nu}_i)$$

wobei $\hat{\nu}_i$ die Eigenwerte von

$$\hat{\Phi} := (\hat{\mathbf{S}}_1^H \hat{\mathbf{S}}_1)^{-1} \hat{\mathbf{S}}_1^H \hat{\mathbf{S}}_2.$$

sind.



■ Bemerkungen:

- Das Pseudo-Spektrum entsteht aus den geschätzten Frequenzen über³⁷

$$\Phi_{\text{ESPRIT}}(\Omega) = \frac{1}{\left| \prod_{i=1}^n (e^{j\Omega} - A_i e^{j\hat{\Omega}_i}) \right|^2},$$

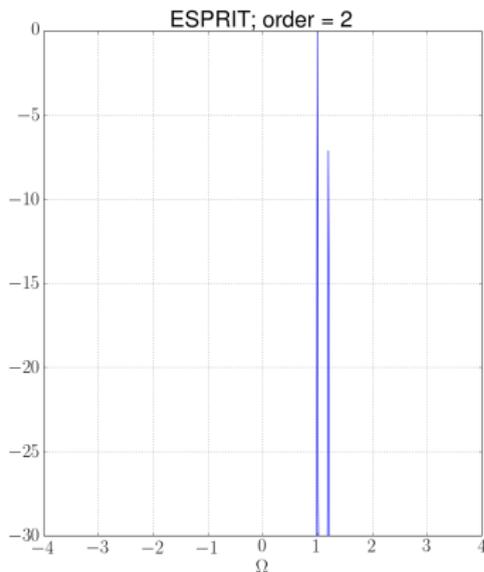
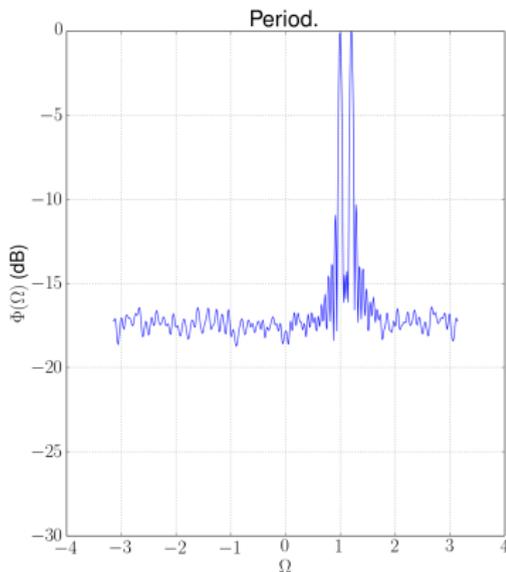
wobei $A_i = |\hat{\nu}_i|$.

- Berechnung von $\hat{\Phi}$ stellt die Least Squares Lösung dar.
- Nach [StMo05]: „[...] statistical accuracy of ESPRIT is similar to [...] MUSIC [...]. In fact, in most cases, ESPRIT may provide slightly more accurate frequency estimates [...]“

³⁷Nach [KK09].



- **Beispiel:** Pseudo-Spektrum zweier Sinussignale ($\Omega_1 = 1.0, \Omega_2 = 1.2$) mit weißem Gaußrauschen, 100 Samples, gemittelt über 100 Realisierungen, $\sigma^2 = 2$ und $n = 2$



4 Spektralschätzung

- Einführung und Problemstellung
- Wie definiert man eine Leistungsdichte für stochastische Prozesse?
- Nicht-parametrische Methoden
- Parametrische Methoden
- **Lernzielkontrolle**
- Literatur

- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Definition der Leistungsdichte (power spectral density, PSD) für stochastische Prozesse
- Nicht-parametrische Schätzer
 - Schätzer für die PSD und deren Zusammenhänge
 - Güte der Schätzer: Erwartungstreue und Varianz
 - Verbesserung durch Blackman-Tukey, Bartlett und Welch
- Parametrische Schätzer
 - Wieso rationale Spektren?
 - Methode von Yule-Walker für AR-Modelle; Levinson-Durbin
 - Linienspektren: Signalmodell, Grundansätze (Signalraum, Rauschraum, ...), Schätzverfahren



- 4 Spektralschätzung
 - Einführung und Problemstellung
 - Wie definiert man eine Leistungsdichte für stochastische Prozesse?
 - Nicht-parametrische Methoden
 - Parametrische Methoden
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- [StMo05] Stoica, Moses, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall, 2005
- [NeMa93] Neeser, Massey, *Proper Complex Random Processes with Applications to Information Theory*, IEEE Transactions on Information Theory, July 1993
- [RG75] L. Rabiner, B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975
- [KK09] K.-D. Kammeyer, K. Kroschel, *Digitale Signalverarbeitung: Filterung und Spektralanalyse*, Vieweg+Teubner, 2009

